

**Квантовая механика. Физический факультет, 3 курс, 6 семестр.**

Занятие №3. *Математический аппарат квантовой механики: Функция от оператора (продолжение). Операторы-матрицы в пространстве  $E_n$ . Свойства матриц Паули.*

1. Проверка д/з.

**Задачи 1-2.** Найти собственные функции и собственные значения операторов

$$-i \frac{d}{d\varphi}, \quad -\frac{d^2}{d\varphi^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

2. Функция от оператора.

**Задача 3.** Доказать соотношение: если  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\alpha$ , то  $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-i\alpha/2}$ . (ЕК Гл. 1 № 3)

3. Пространство  $E_n$ . Операторы-матрицы.

3.1. Единичная матрица  $\delta_{i,k}$

3.2. Эрмитово сопряженная матрица  $(L^\dagger)_{ik} = L_{ki}^*$ .

3.3. Эрмитова матрица  $L_{ik} = L_{ki}^*$

3.4. Унитарная матрица  $\sum_{i=1}^n U_{ik}^* U_{im} = \delta_{km}$ ,  $\sum_{i=1}^n U_{ki}^* U_{mi} = \delta_{km}$ ,  $|\text{Det} U_{ik}| = 1$ .

4. Матрицы Паули в пространстве  $E_2$ .

$$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z); \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** Проверить эрмитовость и унитарность матриц  $\hat{\sigma}_j$ . Вычислить  $\hat{\sigma}_j^2$ .

**Задача 5.** Найти коммутаторы  $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]$  и антикоммутаторы  $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]_+$

**Задача 6.** Найти СФ и СЗ матриц  $\hat{\sigma}_j$ .

**Задача 7.** Найти явный вид операторов  $e^{i\varphi\hat{\sigma}_j}$ . Каков смысл матрицы  $e^{i\varphi\hat{\sigma}_y}$ ?

5. **Самостоятельная работа** (~ 25 минут). Работа состоит из трёх заданий: 1-е задание «стоит» 5 баллов, 2-е и 3-е задания – по 10 баллов, в сумме можно набрать максимум **25 баллов**.

**Домашнее задание:** ЕК Гл.1 № 11; ГКК № 1.34(в,г); для матриц  $\sigma_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ ,  $\hat{\sigma}_z$  вычислить  $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm]$ ,  $\hat{\sigma}_\pm^2$ ,  $[\sigma_+, \sigma_-]$ ,  $[\sigma_+, \sigma_-]_+$

1. Найти собственные значения и собственные функции эрмитова оператора в  $E_2$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{ЕК Гл.1 № 11})$$

2. Найти собственные значения и собственные функции неэрмитовых операторов

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ГКК № 1.34(в,г)})$$

3. Для матриц  $\sigma_{\pm} = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ ,  $\hat{\sigma}_z$  вычислить  $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_{\pm}]$ ,  $\hat{\sigma}_{\pm}^2$ ,  $[\sigma_+, \sigma_-]$ ,  $[\sigma_+, \sigma_-]_+$

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984

ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика, 1976